Augusto Beléndez Vázquez
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante (2017)

2. CINEMÁTICA TRIDIMENSIONAL DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. Introducción

El movimiento tridimensional de un sólido rígido es mucho más complejo que el movimiento plano. Los puntos del cuerpo se desplazan en el espacio tridimensional y además las direcciones de los vectores velocidad angular $\vec{\omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}$ varían con el tiempo. Recordemos que en movimiento plano de un sólido rígido las direcciones de los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ no cambian, manteniéndose siempre perpendiculares al plano del movimiento.

En este caso el tratamiento vectorial no sólo es útil, sino estrictamente necesario para el estudio del movimiento tridimensional de un sólido rígido.

Antes de analizar el movimiento tridimensional de un sólido rígido o bien el caso particular de su rotación en torno a un punto fijo, vamos a considerar algunos aspectos de las rotaciones de cuerpos rígidos en tres dimensiones. De este modo nos familiarizaremos con algunas propiedades de los desplazamientos rotacionales.

En el caso de la rotación en torno a un punto fijo, cada punto del sólido se mueve en una superficie esférica centrada en ese punto.

2. Teorema de Euler. Rotaciones finitas e infinitesimales

Teorema de Euler

"Cuando un sólido rígido gira alrededor de un punto fijo, toda posición del sólido se puede obtener a partir de cualquier otra posición mediante una sola rotación en torno a un cierto eje que pasa por dicho punto fijo".

El teorema de Euler establece que dos rotaciones "componentes" alrededor de ejes diferentes que pasan por un punto equivalen a una sola rotación resultante alrededor de un eje que pasa por el punto. Si se aplican más de dos rotaciones, pueden combinarse en pares y cada par puede reducirse y combinarse aún más en una rotación.

Rotaciones finitas (no son vectores)

Si las rotaciones componentes utilizadas en el teorema de Euler son finitas, es importante mantener el orden en el que se aplican.

Las rotaciones finitas no obedecen la ley conmutativa de la adición:

$$\Delta\vec{\theta}_1 + \Delta\vec{\theta}_2 \neq \Delta\vec{\theta}_2 + \Delta\vec{\theta}_1 \tag{1}$$

y no pueden clasificarse como vectores.

Ejemplo:

Rotación antihoraria de 90º alrededor del eje x

Rotación antihoraria de 90º alrededor del eje y

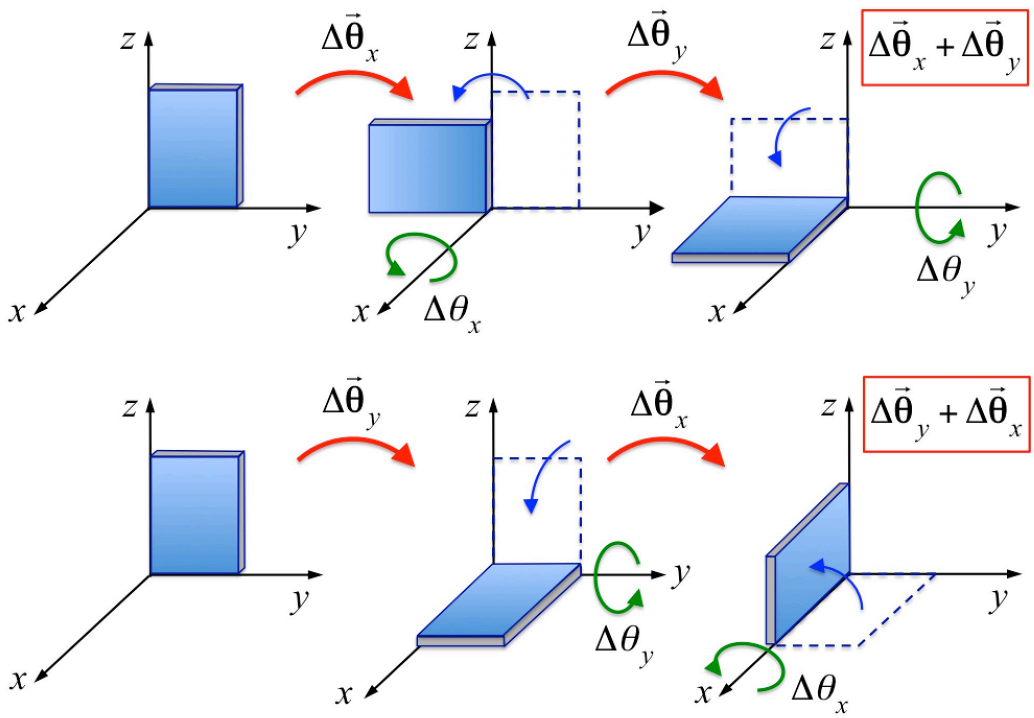

Figura 1

Las posiciones finales no coinciden y la "suma" de las rotaciones depende del orden en que se hagan $(\Delta\vec{\theta}_x + \Delta\vec{\theta}_y \neq \Delta\vec{\theta}_y + \Delta\vec{\theta}_x)$. Por tanto, las rotaciones finitas no son vectores (**"pseudovectores"**).

Rotaciones infinitesimales

Cuando se definen los movimientos angulares de un sólido rígido sometido a movimiento tridimensional, sólo se considerarán las rotaciones que son infinitamente pequeñas. Tales rotaciones pueden clasificarse como vectores, puesto que pueden sumarse de manera vectorial de cualquier modo.

En la figura se han representado dos rotaciones infinitesimales $d\vec{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $d\vec{\boldsymbol{\theta}}_2$ de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo *A*.

$$P \xrightarrow[d\vec{\theta}_1]{} Q_1 \xrightarrow[d\vec{\theta}_2]{} S \qquad P \xrightarrow[d\vec{\theta}_2]{} Q_2 \xrightarrow[d\vec{\theta}_1]{} S$$

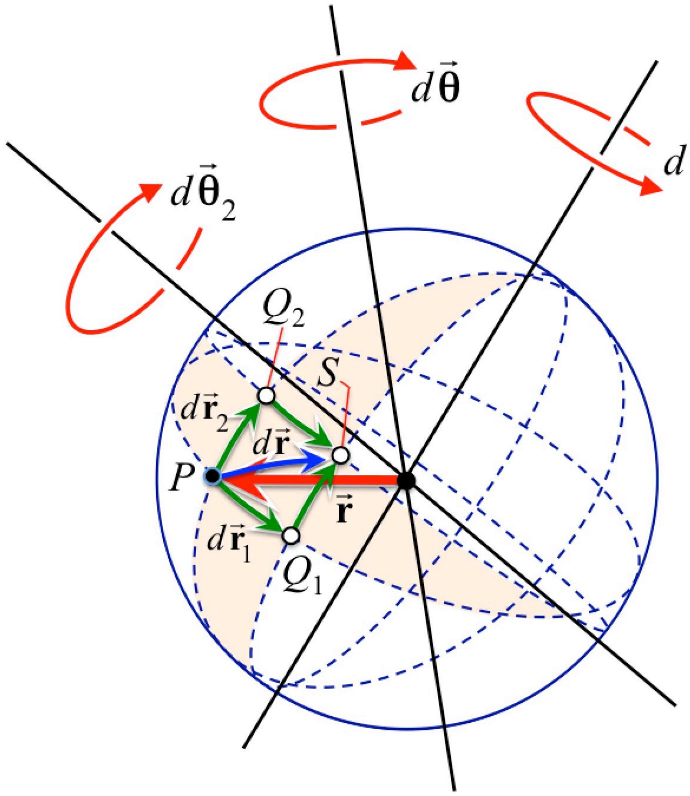

Figura 2

Aunque estos dos movimientos tienen lugar sobre una superficie esférica de radio *R*, en el caso de rotaciones infinitesimales la curvatura de la superficie tiene un efecto despreciable, los lados de la figura de desplazamiento son, en esencia, paralelos y *S* = *S'*. El desplazamiento total del punto *P* vendrá dado por:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{\theta}}_1 + \Delta\vec{\boldsymbol{\theta}}_2 \neq \Delta\vec{\boldsymbol{\theta}}_2 + \Delta\vec{\boldsymbol{\theta}}_1 \qquad (2)$$

donde:

$$d\vec{\boldsymbol{\theta}} = d\vec{\boldsymbol{\theta}}_1 + d\vec{\boldsymbol{\theta}}_2 \qquad (3)$$

es una única rotación resultante en torno al eje que se indica en la figura y no depende del orden de los sumandos en la adición vectorial.

Por consiguiente, las dos rotaciones "componentes" $d\vec{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $d\vec{\boldsymbol{\theta}}_2$ equivalen a una sola rotación resultante $d\vec{\boldsymbol{\theta}} = d\vec{\boldsymbol{\theta}}_1 + d\vec{\boldsymbol{\theta}}_2$, una consecuencia del teorema de Euler.

3. Rotación en torno a un punto fijo

Como ahora sabemos que $d\vec{\theta}$ es un vector, su derivada respecto al tiempo también lo será y este vector es el vector velocidad angular $\vec{\omega}$.

Velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \tag{4}$$

La dirección del vector $\vec{\omega}$ representa el eje en torno al cual gira el cuerpo y su módulo es igual a la rotación que efectúa por unidad de tiempo. Sin embargo, para una rotación en torno a un punto fijo, la dirección de dicho eje no es constante.

La línea que especifica $\vec{\omega}$, la cual es colineal con $d\vec{\theta}$ se conoce como **eje instantáneo de rotación**. Este eje cambia de dirección con el tiempo.

Como $d\vec{\theta}$ es un vector, $\vec{\omega}$ también lo es, por lo que si el cuerpo se somete a dos movimientos angulares $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$, la velocidad angular resultante es:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \tag{5}$$

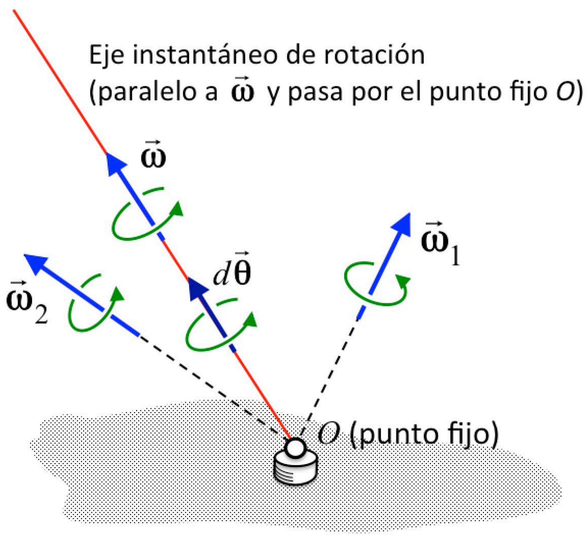

Figura 3

Aceleración angular:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{6}$$

Como tanto la dirección como el módulo de dependen del tiempo, la derivada de $\vec{\omega}$ deberá tener en cuenta las variaciones del módulo y la dirección de $\vec{\omega}$ por lo que, en general, la dirección de $\vec{\alpha}$ no coincidirá con la de $\vec{\omega}$. Esto significa que, en general, $\vec{\alpha}$ no tendrá la dirección del eje instantáneo de rotación.

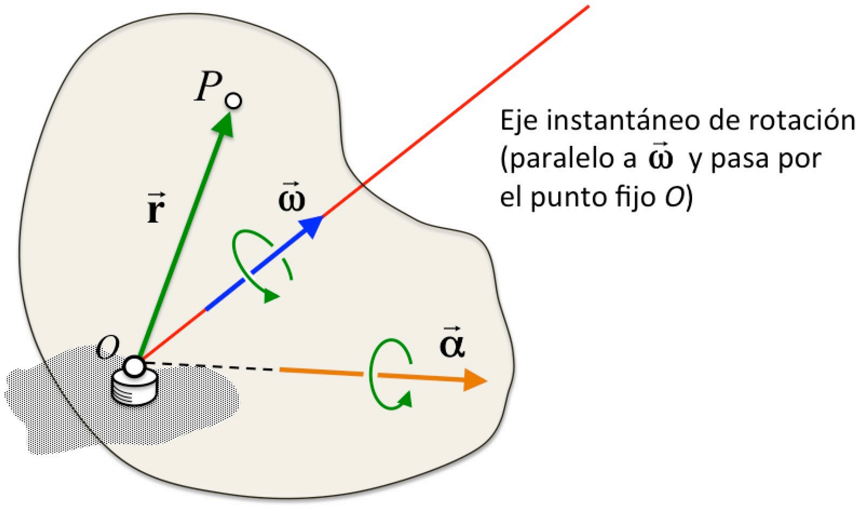

Figura 4

A medida que va cambiando la dirección del eje instantáneo de rotación (línea de acción de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$) en el espacio, el lugar geométrico del eje genera un c**ono espacial** fijo. Si el cambio de este eje se considera con respecto al cuerpo que gira, el lugar geométrico del eje genera un **cono corporal**. En un instante dado, estos conos se encuentran a lo largo del eje instantáneo de rotación, y cuando el cuerpo está en movimiento, el cono corporal parece que rueda sobre la superficie interna o sobre la superficie externa del cono espacial fijo.

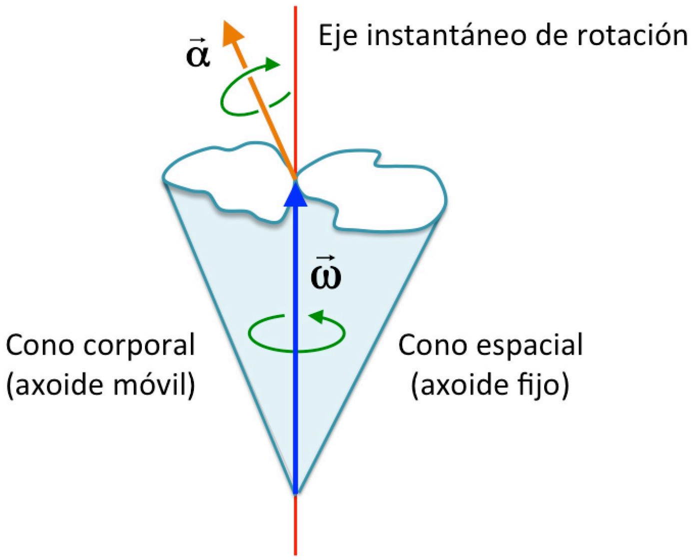

Figura 5

Para ilustrar el concepto, consideremos el disco de la figura que gira alrededor de la barra OG con velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}_s$, mientras que la barra y el disco experimentan precesión con respecto al eje vertical con velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}_p$.

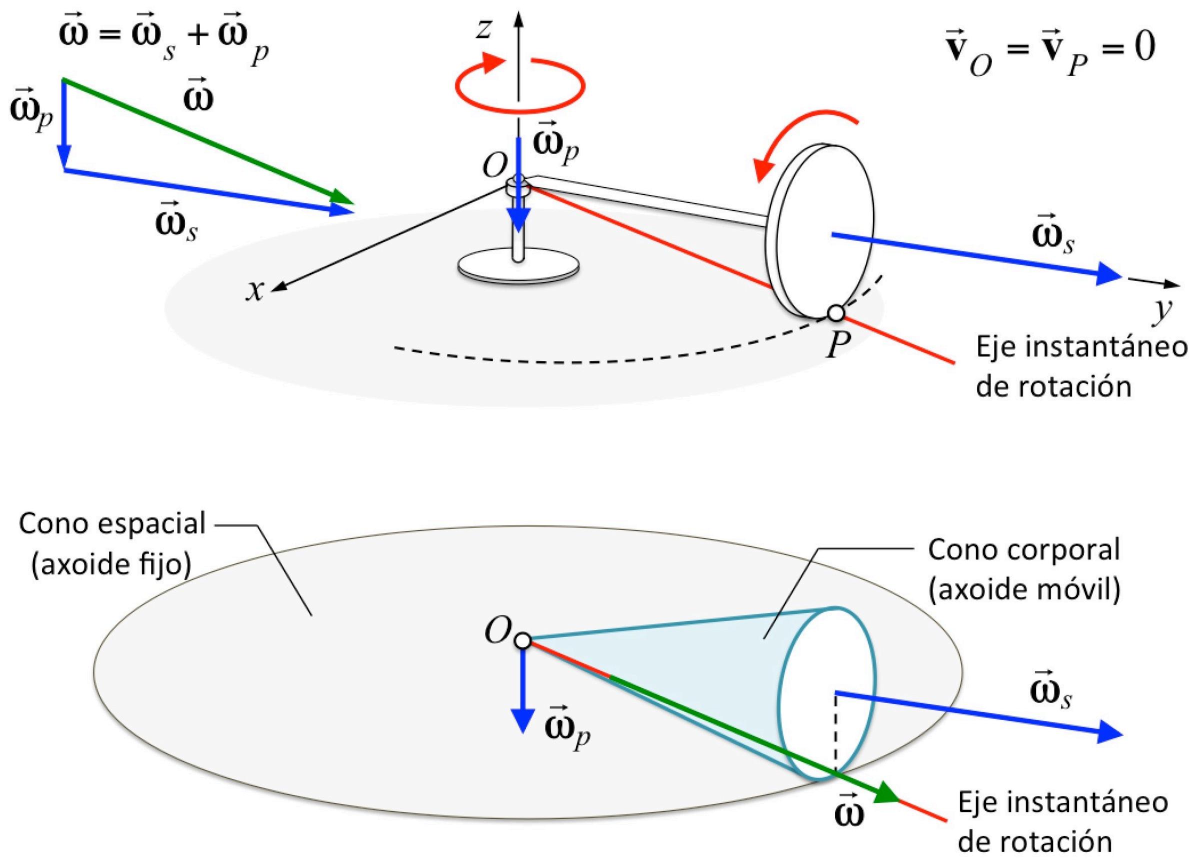

Figura 6

La velocidad angular resultante del disco es:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_s + \vec{\omega}_p \tag{7}$$

Tanto O como P tienen velocidad nula:

$$\vec{\mathbf{v}}_O = \vec{\mathbf{v}}_P = 0 \tag{8}$$

ya que el punto O está fijo y P es el punto de contacto del disco con el suelo sobre el que rueda el disco. Entonces tanto $\vec{\omega}$ como el eje instantáneo de rotación están en la línea recta que pasa por O y por P. Por tanto, a medida que gira el disco, el eje instantáneo de rotación parece moverse a lo largo de la superficie del cono espacial fijo que se muestra en la figura. Si el eje se observa desde el disco rotatorio, entonces parece que el eje se mueve sobre la superficie del cono corporal. En cualquier instante, estos dos conos se encuentran a lo largo del eje OP.

Si $\vec{\omega}$ tuviera módulo constante, entonces $\vec{\alpha}$ indica sólo el cambio en la dirección de $\vec{\omega}$, la cual es tangente a los conos en la punta de $\vec{\omega}$.

El eje instantáneo de rotación también suele denominarse **eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo**. Para los puntos de este eje la velocidad es mínima y se denomina **velocidad de deslizamiento**. En el caso del movimiento alrededor de un punto fijo esta velocidad es nula.

Velocidad de un punto del cuerpo rígido

$$d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\boldsymbol{\theta}} \times \vec{\mathbf{r}} \tag{9}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \times \vec{\mathbf{r}} \tag{10}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} \tag{11}$$

Aceleración de un punto del cuerpo rígido

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} &= \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}) = \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\mathbf{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \\ &= \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\mathbf{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\mathbf{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}) \end{aligned} \tag{12}$$

Es decir:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\mathbf{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}) \tag{13}$$

Es importante tener en cuenta que ahora $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}) \neq -\omega^2 \vec{\mathbf{r}}$.

Aunque estas ecuaciones son formalmente iguales a las del movimiento plano de un sólido rígido en torno a un eje fijo, es necesario tener presente que tanto los módulos como las direcciones de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ varían con el tiempo y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ no es paralela a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

4. Movimiento general de un sólido rígido en el espacio

Consideremos dos puntos *A* y *B* del sólido (Figura 7).

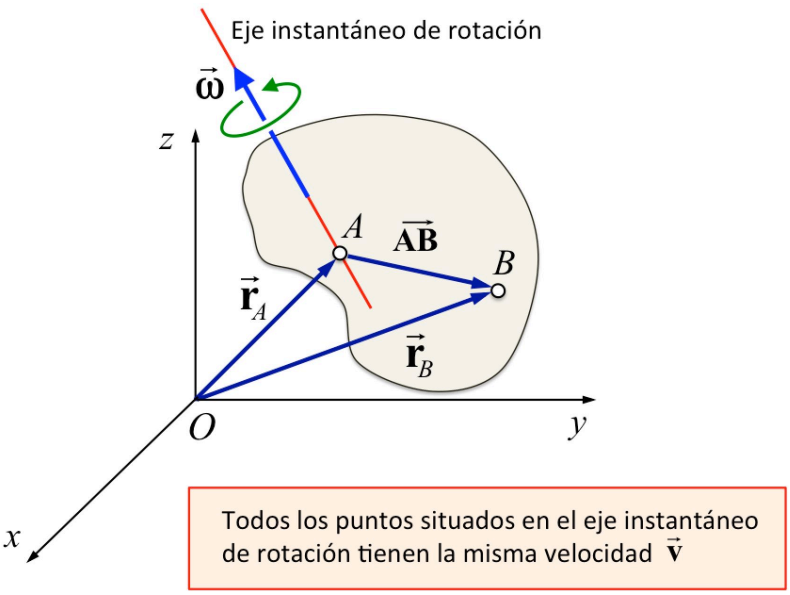

Figura 7

Estos puntos estarán relacionados por la ecuación:

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A + \mathbf{AB} \tag{14}$$

$$\left|\mathbf{AB}\right| = \text{ constante} \tag{15}$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene la velocidad:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_B}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \tag{16}$$

que puede escribirse como:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB} \tag{17}$$

donde:

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB} \tag{18}$$

es la **velocidad relativa** $\vec{\mathbf{v}}_{B/A}$ del punto B respecto al punto A (rotación), $\vec{\mathbf{v}}_{B/A} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB}$, mientras que:

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_A}{dt} \qquad \vec{\mathbf{v}}_B = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_B}{dt} \tag{19}$$

$\vec{\mathbf{v}}_A$ y $\vec{\mathbf{v}}_B$ son las **velocidades absolutas** de los puntos A y B del sólido, respectivamente. En la ecuación (17) $\vec{\mathbf{v}}_B$ tiene en cuenta la traslación y $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB}$ la rotación del sólido.

Derivando la ecuación (17) respecto al tiempo se obtiene la aceleración:

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}_B}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_A}{dt} + \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \mathbf{AB} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\,\mathbf{AB}}{dt} \tag{20}$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}}_B &= \frac{d\vec{\mathbf{v}}_B}{dt} \\ \vec{\mathbf{a}}_A &= \frac{d\vec{\mathbf{v}}_A}{dt} \\ \vec{\boldsymbol{\alpha}} &= \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \\ \frac{d\,\mathbf{AB}}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

donde $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ es la aceleración angular, la aceleración del punto B se puede escribir como:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{a}}_A + \vec{\alpha} \times \mathbf{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB}) \tag{22}$$

En esta ecuación se tiene:

$\vec{\mathbf{a}}_A =$ aceleración absoluta de A

$\vec{\mathbf{a}}_B =$ aceleración absoluta de B

$\vec{\alpha} \times \mathbf{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB}) =$ aceleración del punto B medida relativa al punto A

La aceleración relativa de B (medida respecto a A), $\vec{\mathbf{a}}_{B/A}$, tiene dos componentes:

$$\vec{\mathbf{a}}_{B/A} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \mathbf{AB}}_{\substack{\text{componente}\\ \text{tangencial}\\ \left(\vec{\mathbf{a}}_{B/A}\right)_t}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB})}_{\substack{\text{componente}\\ \text{normal}\\ \left(\vec{\mathbf{a}}_{B/A}\right)_n}} \tag{23}$$

$\vec{\alpha} \times \mathbf{AB}$ es perpendicular a $\mathbf{AB}$.

> De nuevo hay que tener en cuenta que las direcciones de $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ varían con el tiempo y, por tanto, no son constantes, por lo que el cálculo de la velocidad relativa y la aceleración relativa deben realizarse teniendo en cuenta este hecho.

Aunque estas ecuaciones son formalmente iguales a las del movimiento plano de un sólido rígido en torno a un eje fijo, es necesario tener presente que tanto los módulos como las direcciones de $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ varían con el tiempo y $\vec{\alpha}$ no es paralela a $\vec{\omega}$.

5. Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo

Invariantes

En el movimiento de un sólido rígido son invariantes, en cada instante:

(a) La velocidad angular (rotación), $\vec{\omega}$.
(b) El producto escalar $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega}$, que es el mismo para todos los puntos, ya que si se consideran dos puntos cualesquiera del sólido A y B, se tiene:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{AB} \tag{24}$$

multiplicando escalarmente todos los términos de la ecuación por el vector $\vec{\omega}$ queda:

$$\vec{\mathbf{v}}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \mathbf{AB}) \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\omega} \tag{25}$$

ya que $(\vec{\omega} \times \mathbf{AB}) \cdot \vec{\omega} = 0$, entonces:

$$\vec{\mathbf{v}}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\omega} \tag{26}$$

En el caso del **movimiento plano** del sólido rígido como el vector $\vec{\mathbf{v}}$ es perpendicular al vector $\vec{\omega}$, este invariante es nulo:

$$\text{Movimiento plano} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} \perp \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega} = 0 \tag{27}$$

En el caso del **movimiento tridimensional**, en la **rotación en torno a un punto fijo** P, como $\vec{\mathbf{v}}_p = 0$, queda $\vec{\mathbf{v}}_p \cdot \vec{\omega} = 0$, por que también se obtiene:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Rotación en torno} \\ \text{a un punto fijo}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega} = 0 \tag{28}$$

En el caso del **movimiento general de un sólido rígido en el espacio** se tiene que:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega} \neq 0. \tag{29}$$

(c) También son invariantes:

$$\left|\vec{\omega}\right| \quad \text{y} \quad \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega}}{\left|\vec{\omega}\right|} \tag{30}$$

<u>Eje instantáneo de rotación</u>

El eje instantáneo de rotación es el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el módulo del vector velocidad, $\left|\vec{\mathbf{v}}\right|$, es mínimo.

Para la determinación de la ecuación de este eje se pueden considerar dos casos, $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega} = 0$ y $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega} \neq 0$.

(a) $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\omega} = 0$:

En los puntos del eje instantáneo de rotación se tiene que $\vec{\mathbf{v}} = 0$.

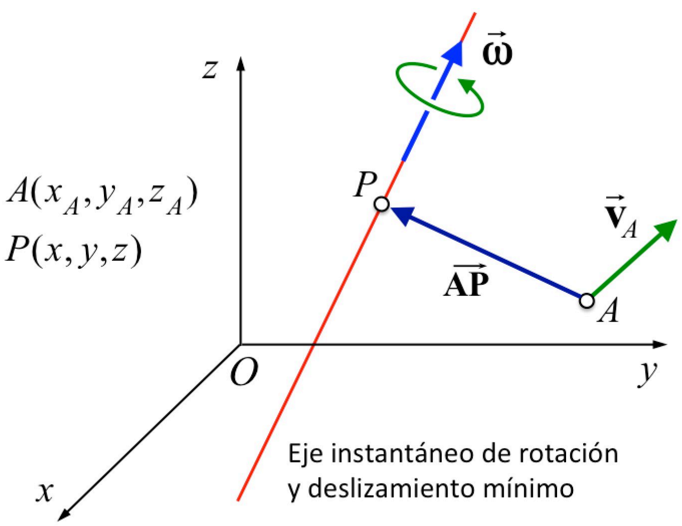

Figura 8

Si el punto $P(x,y,z)$ pertenece al eje instantáneo de rotación y las componentes del vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ son:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega_x \vec{\mathbf{i}} + \omega_y \vec{\mathbf{j}} + \omega_z \vec{\mathbf{k}} \tag{31}$$

entonces:

$$\vec{\mathbf{v}}_P = 0 = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AP} \tag{32}$$

$$v_{Ax}\vec{\mathbf{i}} + v_{Ay}\vec{\mathbf{j}} + v_{Az}\vec{\mathbf{k}} + \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x - x_A & y - y_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & v_{Ax} + \omega_y(z - z_A) - \omega_z(y - y_A) = 0 \\ \text{(II)} & v_{Ay} + \omega_z(x - x_A) - \omega_x(z - z_A) = 0 \\ \text{(III)} & v_{Az} + \omega_x(y - y_A) - \omega_y(z - z_A) = 0 \end{array}\right\} \tag{34}$$

de las cuales, únicamente sólo dos ecuaciones son independientes puesto que $(\vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0)$:

$$\omega_x(\text{I}) + \omega_y(\text{II}) + \omega_z(\text{III}) = 0 \tag{35}$$

El eje instantáneo de rotación es una recta por tener dos ecuaciones lineales independientes. En el caso particular del **movimiento plano** se tiene $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\vec{\mathbf{k}}$, por lo que $\omega_x = \omega_y = 0$, donde tenemos en cuenta que el movimiento tiene lugar en el plano *xy* con *z* = 0. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} v_{Ax} - \omega(y - y_A) = 0 \\ v_{Ay} + \omega(x - x_A) = 0 \end{array}\right\} \tag{36}$$

de donde el eje instantáneo de rotación es una recta perpendicular al plano *xy* (y por tanto paralelo al eje *z*) y que pasa por el punto:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_A - \dfrac{v_{Ay}}{\omega} \\ y = y_A + \dfrac{v_{Ax}}{\omega} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Coordenadas del CIR} \\ \text{en el movimiento plano}\end{array} \tag{37}$$

Para el movimiento tridimensional que corresponde a una rotación en torno a un punto fijo el eje instantáneo de rotación se calcula utilizando las ecuaciones (I, II, III) de las cuales sólo son dos independientes. Para $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$ se tiene que **el eje instantáneo de rotación es paralelo al vector** $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

(b) $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$:

Este es el caso del **movimiento general de un sólido en el espacio**.

Como la proyección de la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ sobre la dirección de la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es un invariante, $\dfrac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|}$, los puntos P en los que el módulo del vector velocidad es mínimo serán aquellos en los que su velocidad $\vec{\mathbf{v}}_p$ sea paralela a la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

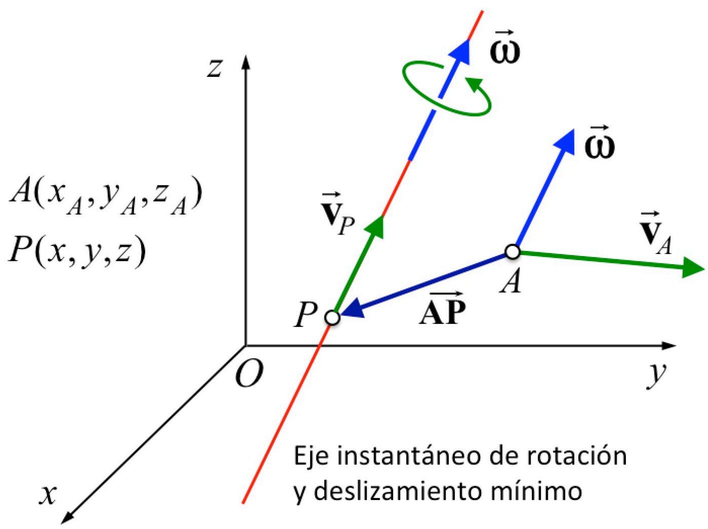

Figura 9

$$\vec{\mathbf{v}}_P = v_{Px}\vec{\mathbf{i}} + v_{Py}\vec{\mathbf{j}} + v_{Pz}\vec{\mathbf{k}} \tag{38}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_A = v_{Ax}\vec{\mathbf{i}} + v_{Ay}\vec{\mathbf{j}} + v_{Az}\vec{\mathbf{k}} \tag{39}$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega_x\vec{\mathbf{i}} + \omega_y\vec{\mathbf{j}} + \omega_z\vec{\mathbf{k}} \tag{40}$$

Imponiendo la condición de que los vectores $\vec{\mathbf{v}}_p$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sean paralelos, queda:

$$\frac{v_{Px}}{\omega_x} = \frac{v_{Py}}{\omega_y} = \frac{v_{Pz}}{\omega_z} \tag{41}$$

Si suponemos que la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_A$ del punto A es conocida:

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AP} \tag{42}$$

de donde:

$$\left.\begin{aligned} v_{Px} &= v_{Ax} + \omega_y(z - z_A) - \omega_z(y - y_A) \\ v_{Py} &= v_{Ay} + \omega_z(x - x_A) - \omega_x(z - z_A) \\ v_{Pz} &= v_{Az} + \omega_x(y - y_A) - \omega_y(z - z_A) \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Imponiendo la condición de que los vectores $\vec{\mathbf{v}}_p$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sean paralelos, se obtiene para el eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento la ecuación de una recta:

$$\frac{v_{Ax} + \omega_y(z - z_A) - \omega_z(y - y_A)}{\omega_x} = \frac{v_{Ay} + \omega_z(x - x_A) - \omega_x(z - z_A)}{\omega_y} = \frac{v_{Az} + \omega_x(y - y_A) - \omega_y(z - x_A)}{\omega_z} \tag{44}$$

Todos los puntos del eje instantáneo de rotación tienen la misma velocidad que se denomina **velocidad de deslizamiento**. Si *P* y *P'* pertenecen al eje instantáneo de rotación, se cumple (Figura 10):

$$\mathbf{AP'} = \mathbf{AP} + \mathbf{PP'} \tag{45}$$

y se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\mathbf{v}}_{P'} = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AP'} = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AP} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{PP'} = \vec{\mathbf{v}}_P \\ &\mathbf{PP'} \in \text{Eje instantáneo de rotación} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{PP'} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

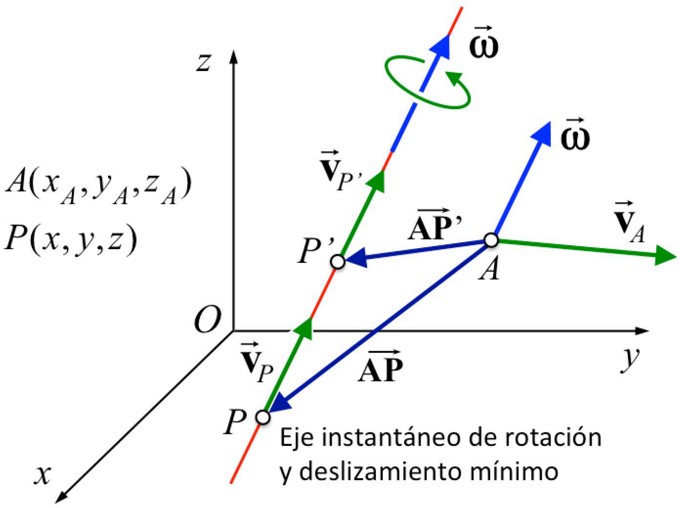

Figura 10

La **velocidad de deslizamiento** (o deslizamiento mínimo) es la velocidad más pequeña del sólido rígido.

La condición de paralelismo de los vectores $\vec{\mathbf{v}}_p$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ puede escribirse:

$$\vec{\mathbf{v}}_p = \lambda\vec{\boldsymbol{\omega}} \tag{47}$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar de la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ de cada punto del sólido y la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es un invariante, se puede escribir:

$$\vec{\mathbf{v}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} \quad \text{(invariante)} \tag{48}$$

y sustituyendo el valor de $\vec{\mathbf{v}}_p$ de la ecuación (47) en la ecuación (48):

$$\lambda\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} \quad \Rightarrow \quad \lambda\omega^2 = \vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} \tag{49}$$

de donde se puede obtener el valor del parámetro λ:

$$\lambda = \frac{\vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}}{\omega^2} \tag{50}$$

6. Movimiento tridimensional relativo a ejes en rotación

El desarrollo de las ecuaciones para la velocidad y la aceleración relativa en el movimiento tridimensional relativo a ejes en rotación sigue un desarrollo similar al del movimiento plano relativo a ejes en rotación, pero ahora además de las coordenadas x e y también se tiene la coordenada z.

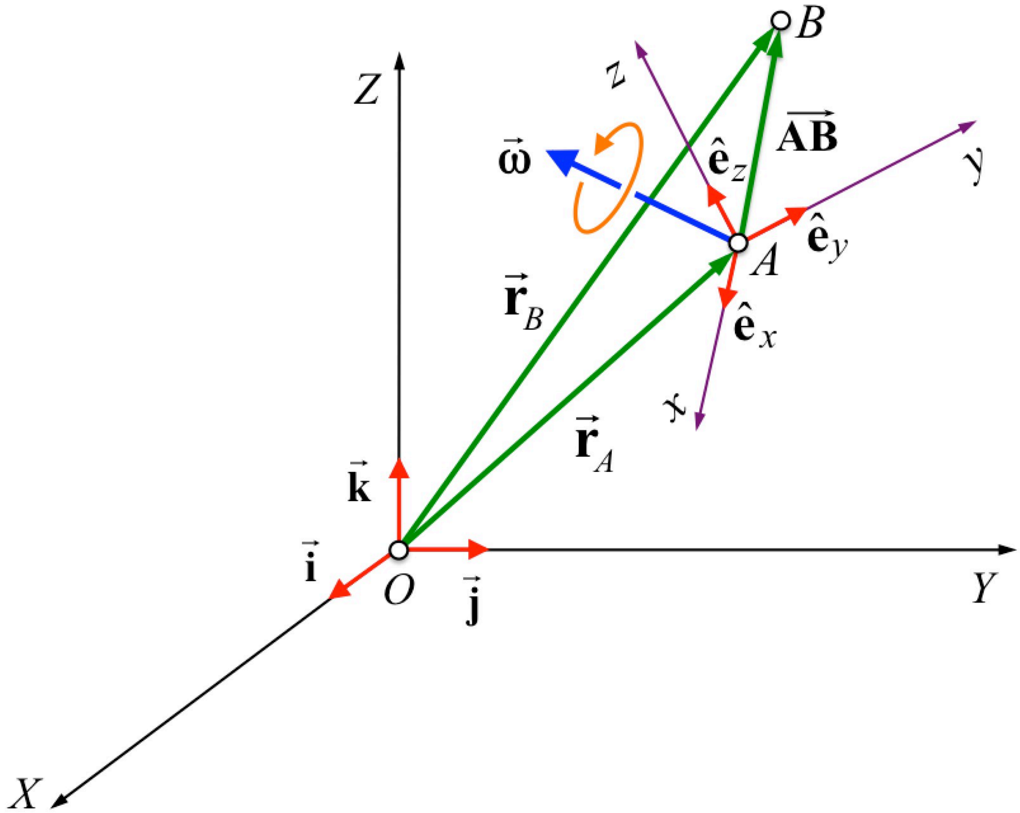

Figura 11

Posición:

$$\vec{\mathbf{r}}_A = X_A\vec{\mathbf{i}} + Y_A\vec{\mathbf{j}} + Z_A\vec{\mathbf{k}} \qquad \text{sistema } XYZ \qquad (51)$$

$$\vec{\mathbf{r}}_B = X_B\vec{\mathbf{i}} + Y_B\vec{\mathbf{j}} + Z_B\vec{\mathbf{k}} \qquad \text{sistema } XYZ \qquad (52)$$

$$\mathbf{AB} = x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y + z_B\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \text{sistema } xyz \text{ (solidario con el cuerpo)} \qquad (53)$$

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A + \mathbf{AB} = \vec{\mathbf{r}}_A + (x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y + z_B\hat{\mathbf{e}}_z) \qquad (54)$$

Velocidad:

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{AB} + \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} \qquad (55)$$

donde:

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \frac{dX_A}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{dY_A}{dt}\vec{\mathbf{j}} + \frac{dZ_A}{dt}\vec{\mathbf{k}} \qquad (56)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \frac{dX_B}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{dY_B}{dt}\vec{\mathbf{j}} + \frac{dZ_B}{dt}\vec{\mathbf{k}} \qquad (57)$$

$$\mathbf{AB} = x_B\hat{\mathbf{e}}_x + y_B\hat{\mathbf{e}}_y + z_B\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (58)$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega_x\vec{\mathbf{i}} + \omega_y\vec{\mathbf{j}} + \omega_z\vec{\mathbf{k}} \qquad (59)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} = \frac{dx_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dz_B}{dt}\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (60)$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}}$ es la velocidad de *B* relativa al sistema de coordenadas giratorio *xyz* (medida en él).

$\vec{\mathbf{v}}_B$	Velocidad de *B* medida respecto al sistema de referencia fijo *XYZ*
$\vec{\mathbf{v}}_A$	Velocidad de *A* (origen del sistema giratorio *xyz*) medida respecto al sistema de referencia fijo *XYZ*
$\vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}}$	Velocidad de "*B* con respecto a *A*" medida respecto al sistema giratorio *xyz*
$\vec{\boldsymbol{\omega}}$	Velocidad angular del sistema de referencia *xyz* medida respecto al sistema de referencia *XYZ*
AB	Posición de *B* con respecto a *A*, cuyas componentes se miden respecto al sistema rotatorio *xyz*

Aceleración:

Derivando la ecuación de la velocidad (55) respecto al tiempo se obtiene la ecuación de la aceleración. Mediante un procedimiento análogo al seguido en el caso del movimiento plano de un sólido rígido se llega a la ecuación:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{a}}_A + \vec{\alpha} \times \mathbf{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB}) + \vec{\mathbf{a}}_{B\mathrm{rel}} + 2\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}} \qquad (61)$$

en la que:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_B}{dt} \qquad \vec{\mathbf{a}}_A = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_A}{dt} \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (62)$$

el término $2\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}}$ es la **aceleración de Coriolis**, las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración angular son:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\mathbf{i}} + \omega_y \vec{\mathbf{j}} + \omega_z \vec{\mathbf{k}} \qquad (63)$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_x \vec{\mathbf{i}} + \alpha_y \vec{\mathbf{j}} + \alpha_z \vec{\mathbf{k}} \qquad (64)$$

y $\vec{\mathbf{a}}_{B\mathrm{rel}}$ es la aceleración de *B* con respecto a *A*, medida por un observador situado en el sistema de referencia rotatorio *xyz*:

$$\vec{\mathbf{a}}_{B\mathrm{rel}} = \frac{d^2 x_B}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{d^2 y_B}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{d^2 z_B}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (65)$$

En la ecuación (61):

$\vec{\mathbf{a}}_B$	Aceleración de *B* medida respecto al sistema de referencia fijo *XYZ*
$\vec{\mathbf{a}}_A$	Aceleración de *A* (origen del sistema giratorio *xyz*) medida respecto al sistema de referencia fijo *XYZ*
$\vec{\omega}, \vec{\alpha}$	Velocidad y aceleración angulares del sistema de referencia móvil *xy* medidas respecto al sistema de referencia *XYZ*
$\vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}}, \vec{\mathbf{a}}_{B\mathrm{rel}}$	Velocidad y aceleración de "*B* con respecto a *A*" medidas por un observador situado en el sistema de referencia rotatorio *xyz*
$\vec{\omega}$	Velocidad angular del sistema de referencia *xyz* mediada respecto al sistema de referencia *XYZ*
AB	Posición de *B* con respecto a *A*, cuyas componentes se miden respecto al sistema rotatorio *xyz*

El significado físico de cada uno de los términos de la ecuación (61) es el siguiente:

$\vec{\mathbf{a}}_B$	Aceleración absoluta de *B*	Movimiento de *B* observado en el sistema fijo *XYZ*
$\vec{\mathbf{a}}_A$	Aceleración absoluta de *A* (origen del sistema giratorio *xyz*)	Movimiento del sistema de referencia *xyz* observado desde el sistema fijo *XYZ*
$\vec{\alpha} \times \mathbf{AB}$	El efecto de la aceleración angular provocado por la rotación del sistema *xyz*	
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{AB})$	El efecto de velocidad angular por la rotación del sistema *xyz*	
$2\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}_{B\mathrm{rel}}$ aceleración de Coriolis	El efecto combinado de *B* al moverse con respecto a las coordenadas *xyz* y a la rotación del sistema *xyz*	Movimiento interactuante
$\vec{\mathbf{a}}_{B\mathrm{rel}}$	Aceleración de "*B* con respecto a *A*" con coordenadas *xyz*	Movimiento de *B* observado desde el sistema móvil *xyz*

7. Derivada respecto al tiempo de un vector medido respecto a un sistema fijo o a un sistema trasladante-rotatorio

Las componentes de un vector $\vec{\mathbf{A}}$ en el sistema de referencia rotatorio *xyz* (Figura 12) son:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y + A_z \hat{\mathbf{e}}_z \qquad \text{sistema } xyz \tag{66}$$

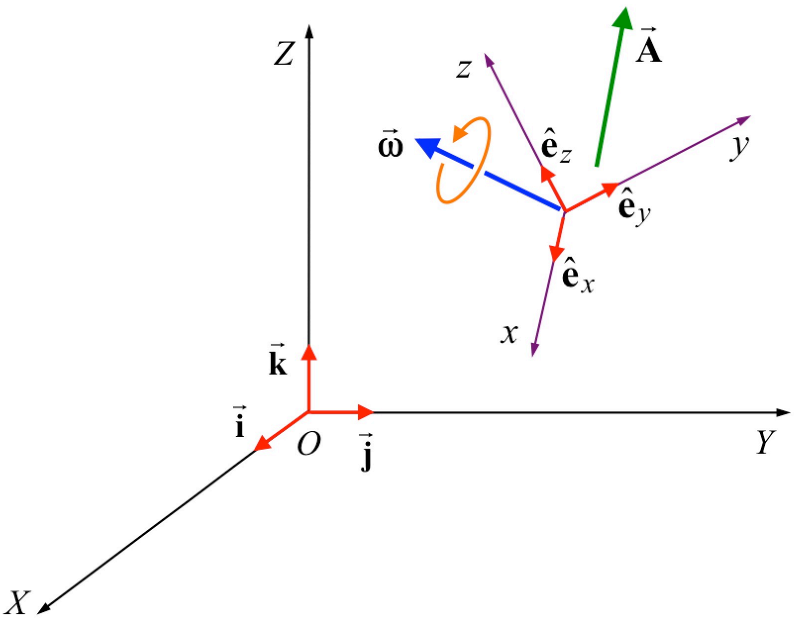

Figura 12

Derivada del vector $\vec{\mathbf{A}}$ respecto al tiempo observada desde el marco de referencia trasladante-rotatorio *xyz* (los vectores $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$ no cambian con el tiempo respecto al sistema *xyz*):

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{xyz} = \frac{dA_x}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dA_y}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{67}$$

que puede escribirse:

$$\left(\dot{\vec{\mathbf{A}}}\right)_{xyz} = \dot{A}_x\hat{\mathbf{e}}_x + \dot{A}_y\hat{\mathbf{e}}_y + \dot{A}_z\hat{\mathbf{e}}_z \tag{68}$$

Derivada del vector $\vec{\mathbf{A}}$ respecto al tiempo observada desde el marco de referencia fijo *XYZ* (los vectores $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$ cambian con el tiempo respecto al sistema *XYZ*):

$$\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \equiv \left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{XYZ} = \frac{dA_x}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dA_y}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{e}}_z + A_x\frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} + A_y\frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} + A_z\frac{d\hat{\mathbf{e}}_z}{dt} \tag{69}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\mathbf{e}}_x \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\mathbf{e}}_y \\ \frac{d\hat{\mathbf{e}}_z}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Por tanto:

$$\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \equiv \left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{XYZ} = \frac{dA_x}{dt}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dA_y}{dt}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{e}}_z + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\left(A_x\hat{\mathbf{e}}_x + A_y\hat{\mathbf{e}}_y + A_z\hat{\mathbf{e}}_z\right) \tag{71}$$

de donde, teniendo en cuenta las ecuaciones (66) y (67), queda:

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{A}} \tag{72}$$

que puede escribirse también en la forma:

$$\left(\dot{\vec{\mathbf{A}}}\right)_{XYZ} = \left(\dot{\vec{\mathbf{A}}}\right)_{xyz} + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{A}} \tag{73}$$

Este resultado es importante y establece que la derivada con respecto al tiempo de cualquier vector $\vec{\mathbf{A}}$ observado desde el marco de referencia fijo *XYZ* es igual al cambio con respecto al tiempo del vector $\vec{\mathbf{A}}$ observado desde el marco de referencia trasladante-rotatorio *xyz* más $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{A}}$, es decir, el cambio del vector $\vec{\mathbf{A}}$ causado por la rotación del sistema de referencia *xyz*.

Esta ecuación deberá utilizarse siempre que $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ cambie la dirección del vector $\vec{\mathbf{A}}$ vista con respecto al sistema de referencia fijo *XYZ*. Si no ocurre este cambio, entonces $(\dot{\vec{\mathbf{A}}})_{XYZ} = (\dot{\vec{\mathbf{A}}})_{xyz}$ y por tanto el cambio de $\vec{\mathbf{A}}$ con respecto al tiempo observado desde ambos sistemas de coordenadas será el mismo.

En la ecuación:

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{74}$$

$\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es la velocidad angular del sistema trasladante-rotatorio *xyz* relativa al sistema fijo *XYZ*. En el caso particular en el que el vector $\vec{\mathbf{A}}$ esté fijo respecto al sistema de coordenadas *xyz* (su módulo, dirección y sentido no cambian en el sistema trasladante-rotatorio *xyz*), entonces:

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{75}$$

BIBLIOGRAFÍA

W. F. Riley y L. D. Sturges, *Ingeniería Mecánica: Dinámica* (Reverté, 1996).

R. C. Hibbeler, *Ingeniería Mecánica: Dinámica* (Prentice Hall, 2010).

F. P. Beer, E. R. Johnston y P. J. Cornwell, *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica* (McGraw Hill, 2010).